SOLUTIONS

Solution 1 :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\dfrac{e^{2x}-1}{2x}}{\dfrac{e^x-1}{x}}$

- $\lim\limits_{x\to 0}2\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=\lim\limits_{X\to 0}2\dfrac{e^X-1}{X}=2\cdot 1=2 \quad (X=2x)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ d'où $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}=2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-2x^2}{x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(\dfrac{e^x}{x^2}-2)}{x(1+\dfrac{4}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\dfrac{e^x}{x^2}-2)}{1+\dfrac{4}{x}}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{4}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{(\frac{x}{2})^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{x}\right]^2$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}(\dfrac{e^X}{2X})^2=+\infty\ (X=\dfrac{x}{2})$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-2x^2}{x+4}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^X-1}{X}=1$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^xe^2=\lim\limits_{x\to-\infty}e^2x^3(e^{\frac{x}{3}})^3$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}e^2(xe^{\frac{x}{3}})^3=\lim\limits_{X\to-\infty}e^2(3Xe^X)^3=0$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=\lim\limits_{x\to-\infty}x^n(e^{\frac{x}{n}})^n=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{\frac{x}{n}})^n$

$=\lim\limits_{X\to-\infty}(nXe^X)^n=\lim\limits_{X\to-\infty}n^n(Xe^X)^n=0 \quad (X=\dfrac{x}{n})$